§5.3 解析函数在孤立奇点∞的性质

一、∞为孤立奇点的分类

Def. ∞为孤立奇点：$f(z)$在$r<|z|<+\infty$内解析，则称$f(z)$以∞为孤立奇点。

∞为$f(z)$的m级零点：$f(z)$在$r<|z|<+\infty$内可表示为$f(z)=\frac{\lambda(z)}{z^m}$，这里$\lambda(z)$在$r<|z|<+\infty$上解析且$\lim\limits_{z\to\infty}\lambda(z)\neq 0$.

∞的邻域：对$r>0$，称$r<|z|<+\infty$为∞的邻域，对应的Laurent级数称为∞点的Laurent级数：$f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n z^n$

2. ∞为孤立奇点的类型

设$f(z)$在孤立奇点∞的Laurent展式$f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n z^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n z^n$

记为$\Sigma_1+\Sigma_2$. 这里Σ_1称为正则部分，Σ_2称为主要部分.

分类如下：

(1) 可去奇点：主要部分为0

(2) m级极点：主要部分为$c_1 z+c_2 z^2+\cdots+c_m z^m\ (c_m\neq 0)$

(3) 本性奇点：主要部分为无限项

例1 (1) 下列函数以∞为可去奇点：$f(z)=\frac{1}{z}$，$f(z)=\frac{1}{z^2}+e^{\frac{1}{z}}$

$f(z)=\sin\frac{1}{z}$

(2) 下列函数以∞为二级极点：$f(z)=z^2+e^{\frac{1}{z}}$，$f(z)=1+z+z^2$

(3) 下列函数以∞为本性奇点：$f(z)=\sin z$，$f(z)=e^z$

Rem. 若$f(z)$以∞为孤立奇点，在变换$z=\frac{1}{\zeta}$下变为$f(\frac{1}{\zeta})$以$\zeta=0$为孤立奇点，对应$z=\infty$的三个类：可去奇点、m级极点、本性奇点，变为$f(\frac{1}{\zeta})$以$\zeta=0$为孤立奇点的三个类：可去奇点、m级极点、本性奇点.

二、以∞为孤立奇点的性质

Thm1. 设∞为$f(z)$的孤立奇点，则下列命题等价：

(1) $f(z)$在$z=\infty$的Laurent展式主要部分为0

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$

(3) $f(z)$在$z=\infty$的某邻域内有界

Thm2. 设∞为$f(z)$的孤立奇点，则下列命题等价：

(1) $f(z)$在$z=\infty$的Laurent展式主要部分为$C_1 z + \cdots + C_m z^m$ ($C_m \neq 0$)

(2) $f(z)$在$z=\infty$的某邻域内有$f(z) = z^m \cdot \varphi(z)$，

这里$\varphi(z)$在$z=\infty$的邻域内解析且$\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) = A \neq 0$.

(3) $\dfrac{1}{f(z)}$以$z=\infty$为m级零点

(4) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$

Thm3. 设$f(z)$以$z=\infty$为本性零点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$不存在且非∞.

Rem. (1) 三个定理证明同上一节

(2) 若$f(z)$以∞为极点或本性奇点，则$f(z)$在$z=\infty$某邻域内无界

(3) Picard大、小定理对$z=\infty$也成立.